104016, אלגברה 1/מ – מועד א', 18/2/14

פתרונות מלאים

<u>שאלה 1</u> (20 נקודות):

נסמן ב $\mathbb{R}_2[x]$ את אוסף כל הפולינומים ממעלה לכל היותר 2 עם מקדמים ממשיים.

נגדיר טרנספורמציה לינארית

$$T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$$

על ידי

$$T(p(x))=(1+2x^2)p''(x)+(1-2x)p'(x)+p(x)+xp(0)$$

כאשר $p(x)\in\mathbb{R}_2[x]$, $p'(x)$ היא הנגזרת של $p(x)$ ו $p''(x)$ היא הנגזרת של $p'(x)$.

א. יהי $E=(1,x,x^2)$ בסיס סדור של $\mathbb{R}_2[x]$. מצא את $[T]_E$.

ב. יהי B הבסיס הסדור $B=(x^2,x,1)$. מצא את $[T]_B$.

ג. מצא את מטריצת המעבר P מ E ל B.

ד. נתון ש $[p(x)]_B=(3,2,1)$ מצא את $[p(x)]_E$.

פתרון שאלה מספר 1:

נסמן איבר כללי במרחב ע"י $p(x)=a+bx+cx^2$ ונכתוב את הנוסחה הכללית של ההעתקה באמצעות איבר זה:

$$T\left(p(x)\right)=(1+2x^2)2c+(1-2x)(b+2cx)+a+bx+cx^2+ax=(a+b+2c)+(a-b+2c)x+cx^2$$

א. מציאת מטריצה מייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי $E=\left(1\,,\,x\,,\,x^2\right)$:

$$T(1)=1+x$$
$$T(x)=1-x$$
$$T(x^2)=2+2x+x^2$$

לכן:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ב. מציאת מטריצה מייצגת לפי הבסיס הסדור $B=\left\{x^2\,,\,x\,,\,1\right\}$. מהחישובים שעשינו בסעיף א' נקבל:

$$T(x^2) = x^2 + 2x + 2$$
$$T(x) = -x + 1$$
$$T(1) = x + 1$$

ולכן:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. למציאת מטריצת המעבר P מ- E ל- B יש לכתוב את B באמצעות E. אבל E הוא הבסיס הסטנדרטי ולכן:

$$x^2 = x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1$$
$$x = 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 \cdot 1$$
$$1 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ד. נתון $[p(x)]_B = (3,2,1)$, כלומר: $p(x) = 3x^2 + 2x + 1$ מאחר וההבדל בין הבסיס Bלבסיס E הוא רק סדר האיברים הרי ש: $[p(x)]_E = (1,2,3)$. אפשר גם לכפול במטריצת המעבר P מהבסיס E לבסיס B, כלומר להשתמש במשפט: $\underset{E \to B}{P}[p(x)]_B = [p(x)]_E$.

שאלה 2 (20 נקודות):

תהי T טרנספורמציה לינארית $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ מוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\z\\y\\x\end{pmatrix}$$

א. מצא בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. מצא בסיס ומימד לגרעין של T^2.

ג. מצא בסיס ומימד לתמונה של T^2.

ד. האם קיים מספר טבעי n כך ש $Ker(T^n)\oplus Im(T^n)=\mathbb{R}^4$?

אם כן, מצא את המספר הקטן ביותר בעל התכונה הזאת. אם לא, הוכח מדוע לא.

פתרון שאלה מספר 2:

א. בסיס ומימד לגרעין:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\z\\y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad z=y=x=0\quad\Rightarrow\quad Ker(T)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\u\end{pmatrix}\middle|\,u\in R\right\}=sp\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

קיבלנו קבוצה פורשת לגרעין שהיא גם בלתי תלויה ולכן בסיס כלומר:

$$B_{KerT}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\quad,\quad \dim(KerT)=1$$

ב. בסיס ומימד לגרעין של T^2:

$$T^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}=T\left(T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}0\\z\\y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\z\\0\end{pmatrix}=0\quad\Leftrightarrow\quad z=y=0\quad\Rightarrow\quad Ker(T^2)=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\0\\u\end{pmatrix}\middle|\,x,u\in R\right\}=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

קיבלנו קבוצה פורשת לגרעין של T^2 שהיא גם בלתי תלויה (כי הוקטורים לא פרופורציונאליים) ולכן בסיס כלומר:

$$B_{KerT^2}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \quad , \quad \dim(KerT^2)=2$$

ג. בסיס ומימד לתמונה של T^2:

$$T^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\z\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}(T^2)=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\\0\end{pmatrix}\middle| \; y,z\in R\right\}=sp\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

קיבלנו קבוצה פורשת לתמונה של T^2 שהיא גם בלתי תלויה (כי הוקטורים לא פרופורציונאליים) ולכן בסיס כלומר:

$$B_{\mathrm{Im}T^2}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \quad , \quad \dim(\mathrm{Im}\,T^2)=2$$

ד. עבור $n=2$ נקבל כי $R^4=KerT^2\oplus\mathrm{Im}T^2$ כי אם ניקח את איחוד הבסיסים של $KerT^2$ ושל $\mathrm{Im}T^2$ נקבל קבוצה שבשינוי סדר היא הבסיס הסטנדרטי של R^4 ולכן היא מהווה בסיס למרחב $KerT^2+\mathrm{Im}T^2$ כלומר $\dim\left(KerT^2+\mathrm{Im}T^2\right)=4$. לכן $KerT^2+\mathrm{Im}T^2$ הוא תת מרחב של R^4 מאותו מימד ולכן $R^4=KerT^2+\mathrm{Im}T^2$. בנוסף, על פי משפט המימדים הראשון נקבל:

$$\dim(KerT^2\cap\mathrm{Im}T^2)=\dim\left(KerT^2\right)+\dim\left(\mathrm{Im}T^2\right)-\dim\left(KerT^2+\mathrm{Im}T^2\right)=2+2-4=0$$

כלומר $KerT^2\cap\mathrm{Im}T^2=\{0\}$ ולכן הסכום הוא סכום ישר כלומר $R^4=KerT^2\oplus\mathrm{Im}T^2$.

נותר להראות ש $n=2$ הוא מינימלי. כדי להראות זאת, יש להראות ש- $n=1$ לא מקיים את הדרישה: $R^4=KerT\oplus\mathrm{Im}T$:

לפי סעיף א' ראינו כי הווקטור: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ שייך לגרעין של T. בנוסף, על פי הגדרת T מתקיים:

$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ כלומר $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ שייך גם לתמונה של T כלומר $KerT\cap \operatorname{Im}T\neq\{0\}$ ובפרט הסכום $KerT+\operatorname{Im}T$ איננו סכום ישר.

שימו לב כי ניתן להראות גם ש $KerT+\operatorname{Im}T\neq R^4$ אך מספיק להראות שהסכום הוא לא סכום ישר בשביל להראות שלא מתקיים: $R^4=KerT\oplus\operatorname{Im}T$.

שאלה 3 (25 נקודות):

תהי $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ מטריצה 2×2 מעל $\mathbb{C}$.

א. מצא את הפולינום האופיני של A.

ב. מצא את הערכים העצמיים של A, הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי, הריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי וכן בסיס למרחבים העצמיים של A.

ג. האם A ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{C}$? אם לא, הוכח מדוע לא. אם כן, מצא מטריצה אלכסונית D הדומה ל A וכן מטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$.

ד. הוכח שקיימים $a,b\in\mathbb{C}$ כך ש $A^{2014}=aA+bI_2$.

כאן I_2 היא מטריצת היחידה 2×2.

פתרון שאלה מספר 3:

א. פולינום אופייני של A:

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 5 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)+5=\lambda^2+4$$

ב. הערכים העצמיים של A הם שורשי הפולינום האופייני לכן: $\lambda_1=2i$, $\lambda_2=-2i$, כל אחד מריבוי אלגברי 1. מאחר ולכל ערך עצמי מתקיים שריבוי אלגברי גדול או שווה לריבוי הגיאומטרי הרי שהריבוי הגיאומטרי של כל אחד מהערכים העצמיים הוא גם 1. נמצא בסיס למרחב העצמי של $\lambda_1=2i$ ע"י פתרון המשוואה ההומוגנית: $(2iI-A)\bar{x}=0$

$$\begin{pmatrix} -1+2i & -1 \\ 5 & 1+2i \end{pmatrix}\xrightarrow[R_1\to(-1-2i)R_1]{}\begin{pmatrix} 5 & 1+2i \\ 5 & 2i+1 \end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\to R_2-R_1]{}\begin{pmatrix} 5 & 1+2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5x+(1+2i)y=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{-1-2i}{5}y$$

$$(x,\ y)=\left(\frac{-1-2i}{5}y\ ,\ y\right)=y\left(\frac{-1-2i}{5}\ ,1\right)$$

קיבלנו קבוצה פורשת ובלתי תלויה למרחב העצמי של $\lambda_1=2i$ ולכן בסיס כלומר בסיס למרחב העצמי של $\lambda_1=2i$ הוא: $\left\{\left(\frac{-1-2i}{5}\ ,1\right)\right\}$. לפי משפט, אם A היא מטריצה ממשית ו- λ הוא ערך עצמי לא ממשי של A עם וקטור עצמי v אז $\bar{\lambda}$ הוא גם ערך עצמי לא ממשי של A עם וקטור עצמי $\bar{v}$ לכן בסיס למרחב העצמי של $\lambda_2=-2i$ הוא: $\left\{\left(\frac{-1+2i}{5}\ ,1\right)\right\}$.

ג. בסעיף ב' ראינו שכל הערכים העצמיים של Aנמצאים בשדה $\mathbb{C}$ וכן לכל ערך עצמי של A מתקיים שריבוי אלגברי שווה לריבוי גיאומטרי שווה ל- 1 ולכן A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ ומתקיים:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{-1+2i}{5} & \frac{-1-2i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \ D=\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$$

ד. על פי משפט קיילי המילטון A מאפסת את הפולינום האופייני שלה ולכן: $A^2+4I=0$ או $A^2=(-4)I$. אם נכפול שוויון זה ב- A^2 ונציב A^2 נקבל:

$A^4=(-4)A^2=(-4)(-4I)=(-4)^2 I$ או באופן כללי לכל $n=2k$ טבעי זוגי נקבל כי

$A^n=A^{2k}=(-4)^k I$ ולכן עבור $n=2014$ נקבל כי: $A^{2014}=(-4)^{1007} I=0\cdot A+(-4)^{1007} I$

כלומר $a=0$, $b=(-4)^{1007}$.

שאלה 4 (15 נקודות):

לכל $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ו $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ב $\mathbb{R}^2$ נגדיר מכפלה פנימית על ידי

$$\langle u, v \rangle = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2$$

א. נתון $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. מצא וקטור u_1 ב $\mathbb{R}^2$ כך ש $u_1 = \alpha e_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ו $||u_1|| = 1$
(לפי המכפלה הפנימית הנתונה).

ב. יהי $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ויהי $w = e_2 - \langle e_2, u_1 \rangle u_1$.
הראה ש $\langle w, u_1 \rangle = 0$ ומצא וקטור $u_2 = \beta w$, $\beta \in \mathbb{R}$ כך ש $||u_2|| = 1$.

ג. מצא וקטור $z \in \mathbb{R}^2$ המקיים $\left\langle z, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ ו $||z|| = 1$.

ד. האם קיים וקטור $v \in \mathbb{R}^2$ כך ש $1 = (v, v) = \langle v, v \rangle$, כאשר (v, v) היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
אם כן, רשום אותו ואם לא, אז הוכח שלא קיים.

פתרון שאלה מספר 4:

א. ננרמל את e_1 (לצרכי נוחות נרשום בשורות):

$$\|e_1\|^2 = \langle e_1, e_1 \rangle = \langle (1,0)\ ,\ (1,0) \rangle = 3\cdot1\cdot1 - 2\cdot1\cdot0 - 2\cdot0\cdot1 + 2\cdot0\cdot0 = 3 \ \Rightarrow\ \|e_1\| = \sqrt{3}$$

$$u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0) \quad , \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

הערה: ניתן לבחור גם את $-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0)$.

ב. נמצא את w ונראה ש $\langle w, u_1 \rangle = 0$ וננרמל את w לקבלת וקטור בעל נורמה 1:

$$w=(0,1)-\left\langle (0,1)\ ,\ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0)=(0,1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\langle (0,1)\ ,\ (1,0)\rangle (1,0)=$$

$$(0,1)-\frac{1}{3}(3\cdot 0\cdot 1-2\cdot 0\cdot 0-2\cdot 1\cdot 1+2\cdot 1\cdot 0)(1,0)=(0,1)-\frac{1}{3}\cdot(-2)\cdot(1,0)=(0,1)+\frac{2}{3}(1,0)=\left(\frac{2}{3}\ ,\ 1\right)$$

$$\langle w,u_1\rangle=\left\langle \left(\frac{2}{3},1\right),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle \left(\frac{2}{3},1\right),(1,0)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1-2\cdot\frac{2}{3}\cdot 0-2\cdot 1\cdot 1+2\cdot 1\cdot 0\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}(2-2)=0$$

$$\|w\|^2=\left\langle \left(\frac{2}{3},1\right),\left(\frac{2}{3},1\right)\right\rangle=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1-2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot 1\cdot 1=-\frac{4}{3}+2=\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad \|w\|=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$u_2=\frac{w}{\|w\|}=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3},1\right)$$

ג. נמצא וקטור העונה על הדרישות:

$$z_1=(x,y)$$
$$\langle z_1,(1,1)\rangle=\langle (x,y)\ ,\ (1,1)\rangle=3\cdot x\cdot 1-2\cdot x\cdot 1-2\cdot y\cdot 1+2\cdot y\cdot 1=0\quad\Rightarrow\quad x=0$$
$$z_1=(x,y)=(0,y)$$

נבחר $y=1$ וננרמל:

$$\|z_1\|^2=\langle z_1,z_1\rangle=\langle (0,1)\ ,\ (0,1)\rangle=3\cdot 0\cdot 0-2\cdot 0\cdot 1-2\cdot 1\cdot 0+2\cdot 1\cdot 1=2\quad\Rightarrow\quad \|z_1\|=\sqrt{2}$$
$$z=\frac{z_1}{\|z_1\|}\quad\Rightarrow\quad z=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1)$$

ד. נסמן $v=(x,y)$. נכתוב את המשוואות המתאימות ונפתור:

$$\begin{cases}(v,v)=1\\ \langle v,v\rangle=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 3x^2-2xy-2yx+2y^2=1\end{cases}$$
$$x^2+y^2=3x^2-2xy-2yx+2y^2$$
$$2x^2-4xy+y^2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{4y\pm\sqrt{16y^2-8y^2}}{4}=\frac{4y\pm\sqrt{8y^2}}{4}=\frac{4y\pm 2\sqrt{2}y}{4}=\frac{2y\pm\sqrt{2}y}{2}$$

נבחר $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}y$ ונציב במשוואה הראשונה:

$$x^2+y^2=1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{2y-\sqrt{2}y}{2}\right)^2+y^2=1$$

$$\frac{4y^2-4\sqrt{2}y^2+2y^2}{4}+y^2=1$$

$$\frac{10-4\sqrt{2}}{4}y^2=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{5-2\sqrt{2}}{2}y^2=1$$

$$y^2=\frac{2}{5-2\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{\frac{2}{5-2\sqrt{2}}} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5-2\sqrt{2}}}$$

$$v=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5-2\sqrt{2}}}\;,\;\sqrt{\frac{2}{5-2\sqrt{2}}}\right)$$

הערה: גישות שונות לפתרון יביאו לתוצאות סופיות אחרת כגון: $x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}y$. ע"י הצבה במשוואה $x^2+y^2=1$ נקבל תשובה מפורשת ל- x ו- y .

שאלה 5 (20 נקודות):

הוכח או הפרך:

א. אם A, B ו C הן מטריצות 10×10 כך ש $r(A) = 7$ ו $AB = AC$
אז $r(B - C) \leq 3$.

ב. אם A מטריצה ממשית מסדר $n \times n$ והפיכה,

כך שכל האיברים בA הם מספרים שלמים וגם כל האיברים בA^{-1} הם מספרים שלמים

אז $det(A^{2014}) = 1$.

ג. אם $\lambda = 1$ הוא ערך עצמי של מטריצה $A_{n\times n}$

אז $det(A)$ הוא ערך עצמי של $adj(A)$.

ד. V מרחב וקטורי מעל F. $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס סדור של V.

יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י $T(v_j) = v_1 + \cdots + v_j$ לכל $j = 1, \ldots, n$

אז T ניתן ללכסון.

פתרון שאלה מספר 5:

א. **טענה נכונה:** לפי משפט, אם A , B הן שתי מטריצות ריבועיות המקיימות $AB=0$ אז $r(A)+r(B)\le n$. במקרה שלנו נתון: $AB=AC$ כלומר: $AB-AC=0$ או $A(B-C)=0$ לכן לפי המשפט מתקיים: $r(A)+r(B-C)\le n$ או $r(B-C)\le n-r(A)$. נתון גם כי $n=10$ ו- $r(A)=7$. נציב ונקבל: $r(B-C)\le n-r(A)=10-7=3$ כלומר $r(B-C)\le 3$.

ב. **טענה נכונה:** כל האיברים במטריצה A הם שלמים לכן הדטרמיננטה של A היא מספר שלם שכן היא מתקבלת מחיבור וכפל שלמים (המספרים השלמים סגורים לכפל וחיבור). באותו אופן גם הדטרמיננטה של A^{-1} היא מספר שלם, אבל $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$ כלומר $\frac{1}{|A|}$ הוא מספר שלם כאשר גם $|A|$ הוא שלם וזה אפשרי רק כאשר $|A|=\pm 1$ ולכן $\left|A^{2014}\right|=|A|^{2014}=(\pm 1)^{2014}=1$.

ג. **טענה נכונה:** נתון ש- $\lambda=1$ הוא ערך עצמי של A כלומר קיים $v\ne 0$ ב- F^n כך ש- $Av=\lambda v=1\cdot v=v$. נכפול את שני האגפים ב $adj(A)$ משמאל, ונזכור כי $A\cdot adj(A)=adj(A)\cdot A=|A|\cdot I$ ונקבל: $adj(A)\cdot A\cdot v=adj(A)\cdot v$ נציב $adj(A)\cdot A=|A|\cdot I$ ונקבל: $|A|\cdot I\cdot v=adj(A)\cdot v$ כלומר: $adj(A)\cdot v=|A|\cdot v$ כאשר $v\ne 0$ וקיבלנו כי לפי ההגדרה, $|A|$ הוא ערך עצמי של $adj(A)$ עם וקטור עצמי v.

הערה: אין להניח כי המטריצה A הפיכה. אם A לא הפיכה אז $|A|=0$ כלומר נקבל ש- 0 הוא ערך עצמי של $adj(A)$ וזה לא סותר את הטענה (שכן אם A לא הפיכה אז גם $adj(A)$ לא הפיכה).

ד. **טענה לא נכונה:** נבנה מטריצה מייצגת של T לפי הבסיס B הנתון:

$$\begin{aligned}
&T(v_1)=v_1\\
&T(v_2)=v_1+v_2\\
&T(v_3)=v_1+v_2+v_3\\
&\vdots\\
&T(v_n)=v_1+v_2+\ldots+v_n
\end{aligned}$$

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשת עליונה שבה איברי האלכסון הם 1 ולכן 1 הוא ע"ע מריבוי אלגברי n. נמצא ריבוי גיאומטרי של 1:

$$n-r([T]_B-I)=n-r\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=n-(n-1)=1$$

קיבלנו כי ריבוי אלגברי של 1 לא שווה לריבוי הגיאומטרי שלו ולכן המטריצה המייצגת לא לכסינה ולכן גם T לא לכסין.

הערה: ניתן לנמק גם באמצעות המשפט: אם למטריצה מסדר $n\times n$ יש ערך עצמי יחיד מריבוי אלגברי n אז המטריצה לכסינה אם"ם היא סקלרית. לפי משפט זה המטריצה המייצגת לא לכסינה (כי יש לה ערך עצמי מריבוי אלגברי n והיא לא סקלרית) לכן גם האופרטור לא לכסין.